

TERI : Traitement et reconnaissance d'images

Cours Master IAD - 2006/07

Isabelle Bloch - ENST / Département Signal & Images

Henri Maître - ENST / Département Signal & Images

Florence Tupin - ENST / Département Signal & Images

Antoine Manzanera – ENSTA / Unité d'Électronique et d'Informatique



Filtrage et Restauration

Ce cours s'intéresse aux techniques d'*amélioration* des images numériques, pour augmenter la qualité de leur rendu visuel, ou pour faciliter leur analyse. On cherche donc à atténuer, sinon supprimer une certaine *dégradation*. Celle-ci n'est pas forcément connue *a priori*, mais elle peut parfois être estimée *a posteriori*. On distinguera ici :

- les dégradations liées au *bruit* : $g(x) = f(x)+b(x)$ ou $g(x) = f(x)b(x)$ liées au capteur, à la quantification, à la transmission... On les traite en tirant parti des informations locales par le *filtrage*. Par différenciation, les techniques de filtrage permettent en outre de calculer ou amplifier les contrastes locaux.

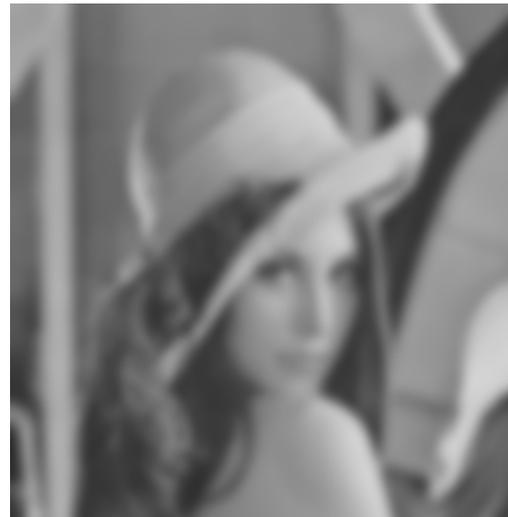
- les dégradations *convolutives* : $g(x) = f(x)*b(x)$ liées à un mouvement du capteur ou un défaut de mise au point. On les traite en inversant un opérateur linéaire, donc supposé connu : ce sont les techniques dites de *restauration*.



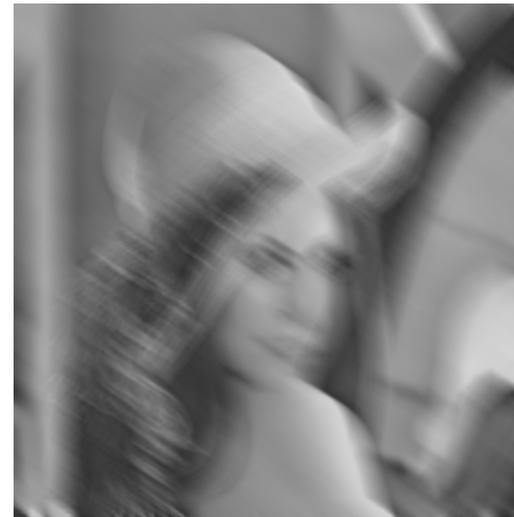
bruit additif



bruit multiplicatif



flou de mise au point



flou de bougé

Filtrage et Restauration – Plan du cours

I Filtres de lissage

- I-1 Filtrage dans le domaine de Fourier
- I-2 Filtrage par convolution
- I-3 Implantation des filtres linéaires
- I-4 Bruit multiplicatif
- I-5 Filtres non linéaires

II Filtres dérivateurs

- II-1 Filtrage dans le domaine de Fourier
- II-2 Filtrage par convolution
- II-3 Filtres non linéaires

III Restauration (Isabelle Bloch)

- III-1 Modélisation fréquentielle : Filtres de Wiener
- III-2 Modélisation algébrique : Méthodes directes et itératives

I Filtres de lissage

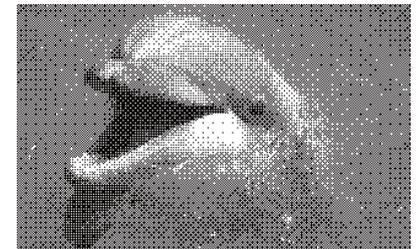
Les filtres de lissage sont des opérateurs qui *éliminent* des éléments *perturbateurs / non significatifs* dans les images numériques, soit pour *améliorer* leur visualisation, soit pour les *simplifier* en but d'un traitement postérieur :



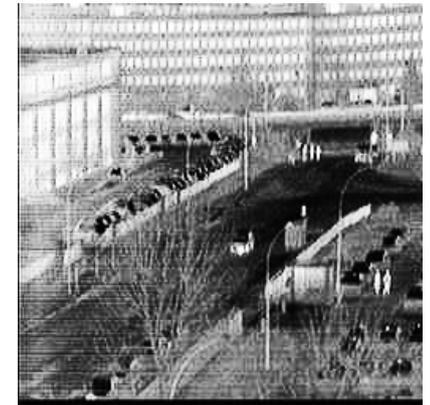
bruit d'acquisition, de numérisation, de transmission : les incertitudes dans les différentes étapes de formation de l'image numérique induisent des fluctuations aléatoires de la valeur des pixels (à droite, bruit gaussien). Les erreurs de transmission font apparaître des valeurs aberrantes (à gauche, bruit impulsionnel).



bruit de compression : les techniques de compression d'image avec perte produisent une distortion dans l'image, comme cet effet de bloc dans la transformée Jpeg (taux de compression 1/25).



rendu : les images codés en demi-teintes de l'imprimerie présentent à grande échelle un effet pointilliste.



bruit spatial fixe : la non-uniformité des détecteurs dans la matrice de cet imageur infra-rouge entraîne une texturation de l'image.

PLAN DU CHAPITRE :

- (1) Filtrage dans le domaine de Fourier
- (2) Filtrage par convolution
- (3) Implantation des filtres linéaires
- (4) Filtres non linéaires

I-1 Filtrage dans le domaine de Fourier (1)

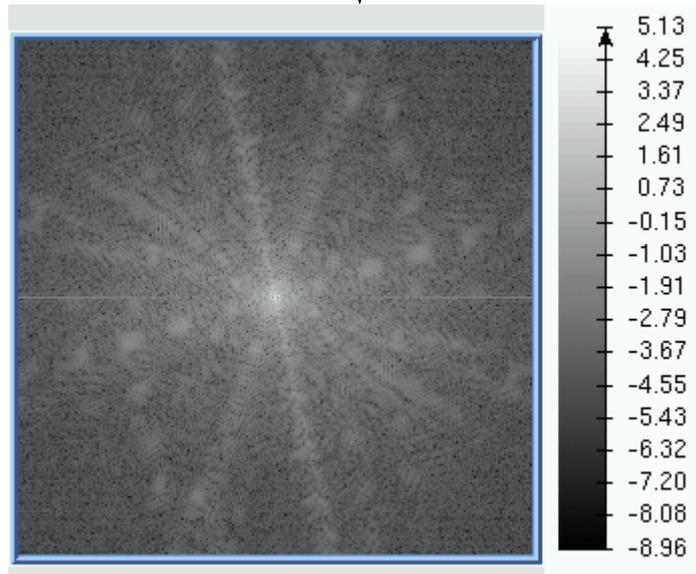
Filtrage passe-bas

Le filtrage passe-bas est la multiplication dans le domaine fréquentiel par une *fonction porte* (fonction indicatrice d'un intervalle $[-u_{max}, u_{max}] \times [-v_{max}, v_{max}]$).

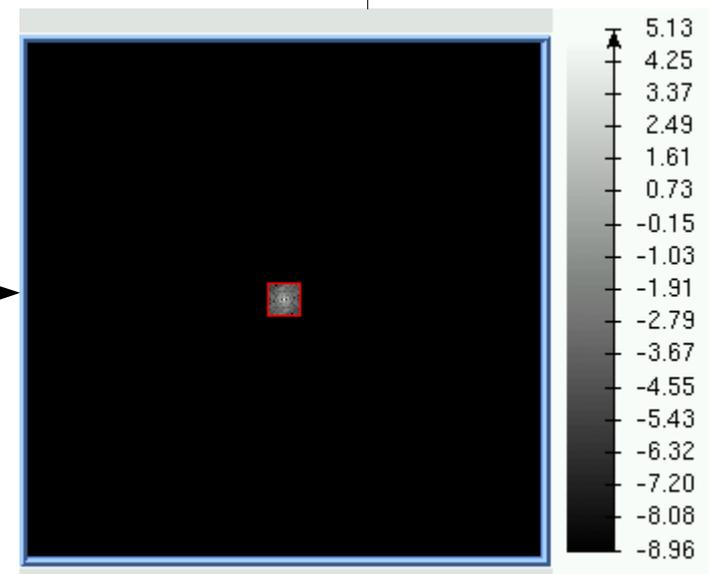


TF

TF^{-1}



Passe-bas



I-1 Filtrage dans le domaine de Fourier (2)

Filtrage coupe-bande

Le filtrage coupe-bande est la multiplication dans le domaine fréquentiel par une *fonction bande complémentaire*, fonction indicatrice de l'ensemble :

$$(\mathbb{R}^2 \setminus [-u_{max}, u_{max}] \times [-v_{max}, v_{max}]) \cup [-u_{min}, u_{min}] \times [-v_{min}, v_{min}]$$

Notons que dans ce cas comme le précédent, la valeur de la fréquence origine $F[0,0]$ est inchangée. Or :

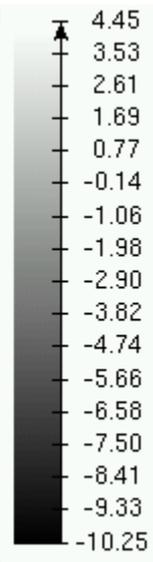
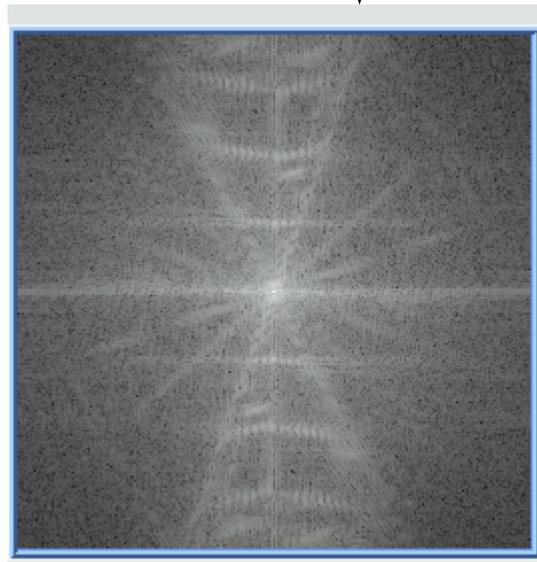
$$F[0,0] = \sum_{x=0}^w \sum_{y=0}^h f[x, y]$$

La somme des niveaux de gris dans le domaine spatiale reste donc constante.

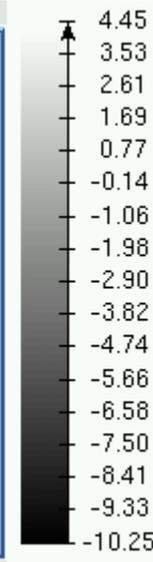
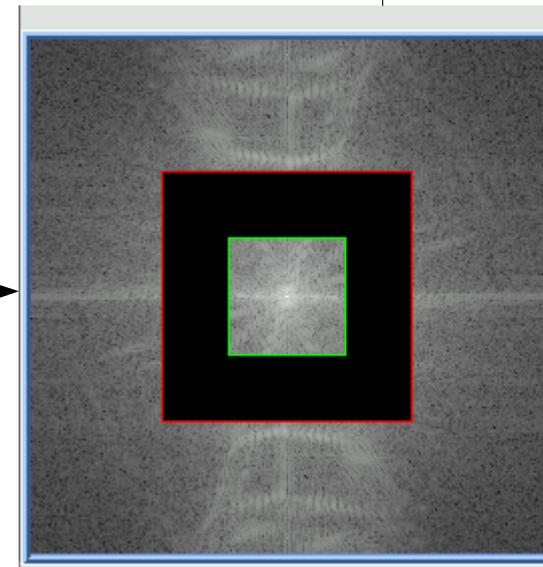


TF

TF⁻¹



Coupe-bande



I-2 Filtrage par convolution (1)

La multiplication dans le domaine fréquentiel correspond à la convolution dans le domaine spatial. Un grand nombre de filtres de lissage peut être obtenu à partir de noyaux de convolution symétriques et normalisés (de somme égale à 1). Voici 3 famille de filtres parmi les plus utilisés :

Moyenne

* Réponse impulsionnelle :

$$h(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \text{si } (x, y) \in [-\lambda/2, +\lambda/2]^2$$

$$h(x, y) = 0 \text{ sinon}$$

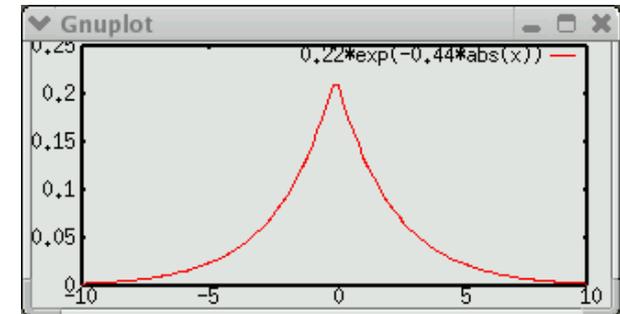
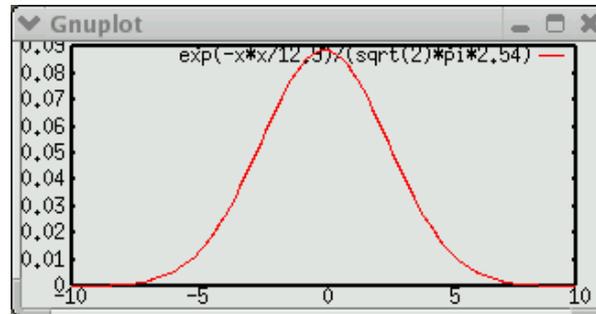
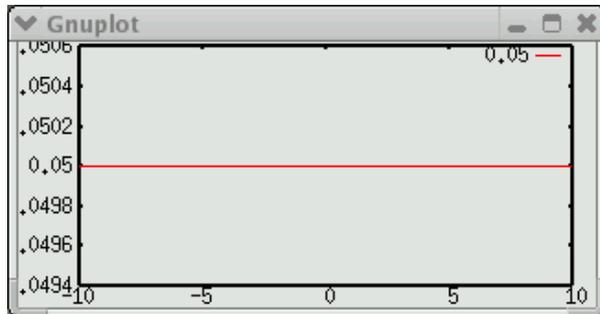
Gauss

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Exponentiel

$$h(x, y) = \frac{\gamma^2}{4} \exp(-\gamma(|x| + |y|))$$

* Représentation graphique de la réponse impulsionnelle (en 1d) :



* Exemple de noyaux de convolution discrets :

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtre moyenneur (5x5)

$$\frac{1}{864} \begin{pmatrix} 11 & 23 & 29 & 23 & 11 \\ 23 & 48 & 62 & 48 & 23 \\ 29 & 62 & 80 & 62 & 29 \\ 23 & 48 & 62 & 48 & 23 \\ 11 & 23 & 29 & 23 & 11 \end{pmatrix}$$

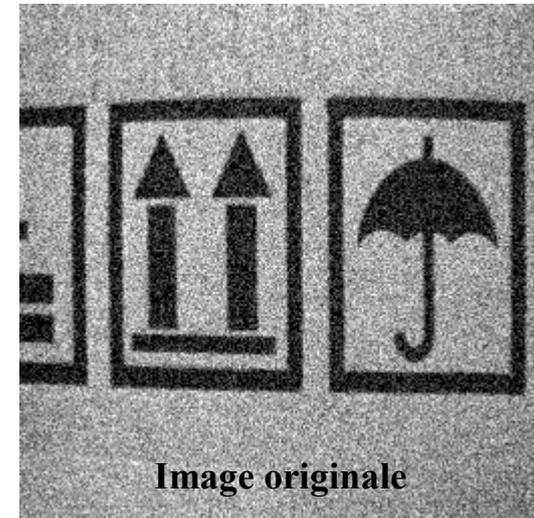
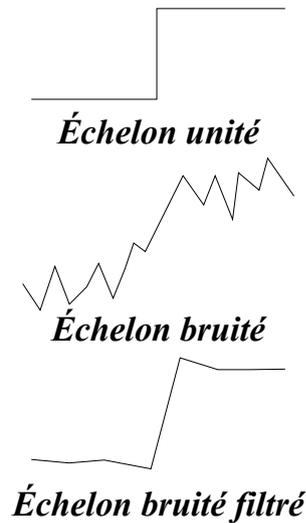
Filtre gaussien ($\sigma = 1,41$)

$$\frac{1}{80} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 16 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtre exponentiel ($\gamma = 0,8$)

I-2 Filtrage par convolution (2)

Coefficient de dispersion : pour un échelon unitaire perturbé par un bruit blanc de variance v^2 , la variance du bruit filtré devient δv^2 .

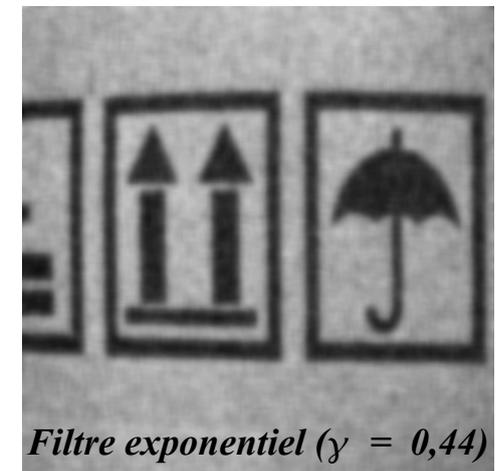
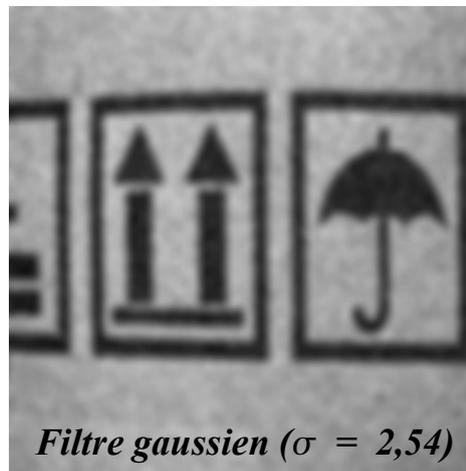
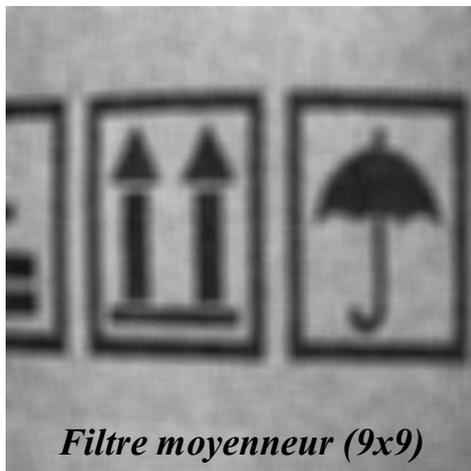


* *Coefficients de dispersion* :

$$\delta = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\delta = \frac{1}{4\pi\sigma^2}$$

$$\delta = \frac{\gamma^2}{16}$$



I-3 Implantation des filtres linéaires

En traitement d'images, les volumes de données traités sont bien sûr très importants. La prise en compte du temps de calcul reste un élément majeur dans les algorithmes en dépit des progrès technologiques exponentiels des microprocesseurs. L'implantation des filtres linéaires, en particulier ceux dont le support est grand, voire infini, est un problème incontournable.

- (a) multiplication dans le domaine de Fourier
- (b) convolution directe par noyau (tronqué)
- (c) noyaux séparables
- (d) implantation récursive des filtres à réponse impulsionnelle infinie

I-3-a Multiplication dans le domaine de Fourier

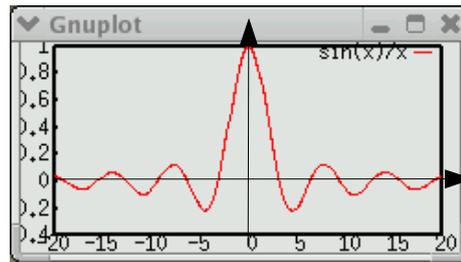
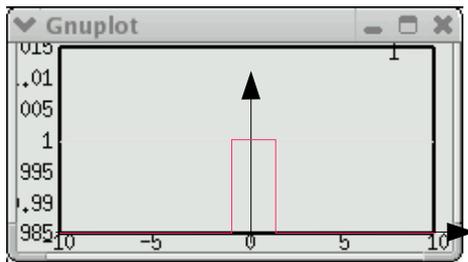
Grâce à la correspondance convolution-produit dans la transformée de Fourier (TF), la convolution de l'image f par un filtre de réponse impulsionnelle h peut se calculer comme la TF inverse du produit $F \cdot H$, où F (resp. H) est la TF de f (resp. h).

CORRESPONDANCE CONVOLUTION / PRODUIT

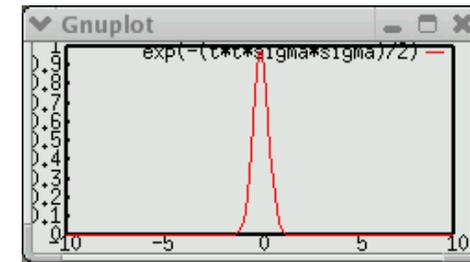
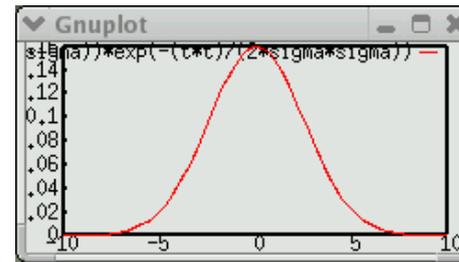
$$f_1[x, y] * f_2[x, y] \rightarrow F_1[u, v] \cdot F_2[u, v]$$

$$f_1[x, y] \cdot f_2[x, y] \rightarrow F_1[u, v] * F_2[u, v]$$

Fonction porte \leftrightarrow *Sinus cardinal*



Gaussienne (σ) \leftrightarrow *Gaussienne* ($1/\sigma$)



La complexité de l'implantation par multiplication dans le domaine fréquentiel est celle de 2 calculs de TF (1 direct + 1 inverse), plus 1 multiplication. Pour une image de taille $N \times N$, le coût de la multiplication est en $O(N^2)$, et en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT), le coût de la TF est en $O(N \cdot \log_2(N))$.

Dans ce cas, la complexité est indépendante de la taille $K \times K$ du noyau de convolution. Ce type d'implantation peut être intéressant pour des gros noyaux, ($K^2 \gg \log_2(N)$). Il nécessite cependant une grande précision dans les valeurs de la TF (représentation en complexes flottants).

I-3-b/c convolution directe / noyaux séparables

$$\frac{1}{80} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 16 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La convolution de l'image f par un filtre de réponse impulsionnelle h représenté par un noyau fini (éventuellement tronqué) peut être calculé directement par balayage des pixels de f et calcul de la somme des valeurs des voisins de chaque pixel pondérées par les valeurs du noyau de convolution.

La complexité de l'implantation directe pour une image de taille $N \times N$ et pour un noyau de convolution de taille $K \times K$, est en $O(K^2 N^2)$. Le coût par pixel est donc quadratique en fonction du rayon du noyau.

Filtres séparables :

Lorsque la matrice de convolution peut s'écrire comme produit d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne :

$$\llbracket h \rrbracket = [h_{col}] \cdot [h_{lig}]^t$$

Alors : $h[x, y] = h_{col}[x] \cdot h_{lig}[y]$

Et : $(I * h)[x, y] = \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} h[i, j] \cdot I[x-i, y-j] = \sum_{i=x_1}^{x_2} h_{col}[i] \sum_{j=y_1}^{y_2} h_{lig}[j] \cdot I[x-i, y-j]$

La complexité de l'implantation pour une image de taille $N \times N$ et pour un noyau de convolution de taille $K \times K$, devient $O(KN^2)$. Le coût par pixel est donc linéaire en fonction du rayon du noyau.

Les filtres moyenneur, gaussien, exponentiel sont des filtres séparables.

I-3-d Implantation récursives des filtres IIR

La convolution directe par noyau fini permet d'implanter les filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR), mais pose problème dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR). On peut approximer les filtres IIR en tronquant le noyau de convolution (on choisit par exemple des supports de rayon 2σ ou 3σ pour approximer la gaussienne par un filtre FIR). On retiendra cependant que la TF d'un filtre FIR étant à support infini, on ne peut pas éliminer totalement les hautes fréquences avec un filtre FIR.

Certains filtres IIR possèdent la propriété de pouvoir être calculés *de manière récursive* (cf transformée en Z). C'est le cas du filtre exponentiel, ou de certaines approximations du noyau gaussien. Le filtrage est en général obtenu par un filtre causal, calculé par balayage direct, suivi d'un filtre anti-causal, calculé par un balayage rétrograde :

Ex : filtre IIR 1D horizontal :

$$f[i] = \alpha_0 f[i] + \alpha_1 f[i-1] + \alpha_2 f[i-2] \quad \text{Séquence causale (directe)}$$

$$f[i] = \gamma_0 f[i] + \gamma_1 f[i+1] + \gamma_2 f[i+2] \quad \text{Séquence anti-causale (rétrograde)}$$

La complexité de cette implantation est en $O(N^2)$, elle est en général indépendante des paramètres du noyau de convolution. Elle a de plus donné lieu à des implantations matérielles (circuits spécialisés). Cependant les problèmes de précision nécessitent en général un passage en nombre flottant et donc une augmentation de la dynamique.

I-4 Bruit multiplicatif : filtrage homomorphique

Pour un bruit additif, on avait $g(x) = f(x) + b(x)$, et donc dans le domaine de Fourier $G(u) = F(u) + B(u)$. On pouvait donc tenter d'éliminer $B(u)$ directement sur le spectre (ex : filtre passe-bas : multiplication par le complémentaire de la fonction indicatrice du support de B), ou ce qui est équivalent, par convolution.

Dans le cas d'un bruit multiplicatif $g(x) = f(x).b(x)$, on n'a plus addition des spectres, on ne peut donc plus fonctionner par convolution directe.

Le principe du filtrage homomorphique est de se ramener au cas linéaire en passant par le logarithme :

$$g \xrightarrow[\text{logarithme}]{} h = \log(g) \xrightarrow[\text{TF}]{} H \xrightarrow[\text{Filtrage}]{} H \times T \xrightarrow[\text{TF inverse}]{} k \xrightarrow[\text{exponentiel}]{} \hat{f} = e^k$$

Voici deux exemples d'applications très différents :

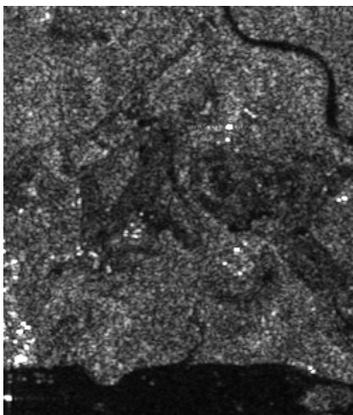


Image radar (SAR) avec un défaut de bruit multiplicatif caractéristique (speckle).

Image visible avec forte variation de l'illumination i : on cherchera à retrouver la composante de réflectance r à partir du niveau de gris g :
 $g(x) = r(x).i(x)$



I-5 Filtres non linéaires

Deux aspects du lissage sont concernés par le filtrage non linéaire :

- *Le bruit impulsionnel* : les filtres linéaires éliminent mal les valeurs aberrantes.
- *L'intégrité des frontières* : on souhaiterait éliminer le bruit sans rendre flous les frontières des objets.

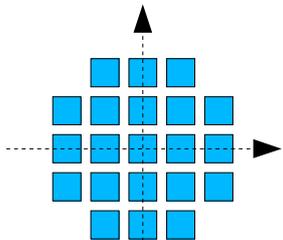
(a) Filtres d'ordre, médian

(b) Filtres non linéaires divers – ex : Nagao

(c) Filtres morphologiques

I-5-a Filtres d'ordre, médian

Les filtres d'ordres procèdent en remplaçant les valeurs de chaque pixel par la valeur qui occupe *un certain rang* lorsqu'on trie les valeurs observées dans *un certain voisinage* du pixel.



voisinage : élément structurant

les valeurs dans le voisinage de (x,y) : $V(x,y) = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$

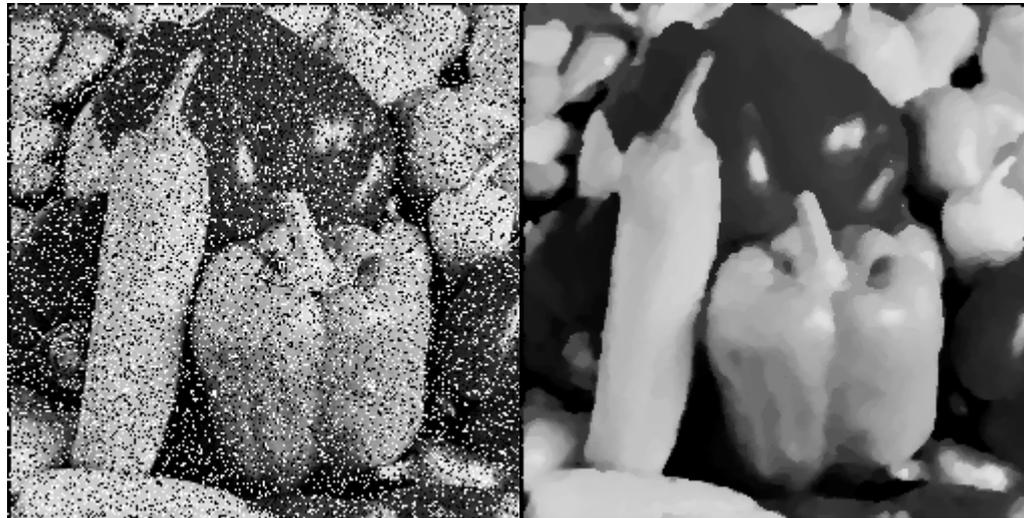
soit $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ permutation de $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ telle que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_N$

alors le filtre d'ordre de rang k est défini par : $\rho_k[x, y] = b_k$

pour $k=N/2$, on parle de **filtre médian**, pour $k=1$, d'**érosion morphologique**, pour $k=N$, de **dilatation morphologique**.

Implantations du médian :

- calcul d'histogrammes locaux
- tri des valeurs dans le voisinage (Quick Sort)
- tri incrémental
- .../...



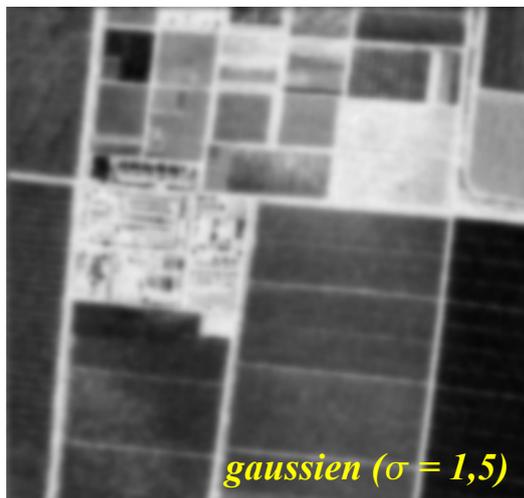
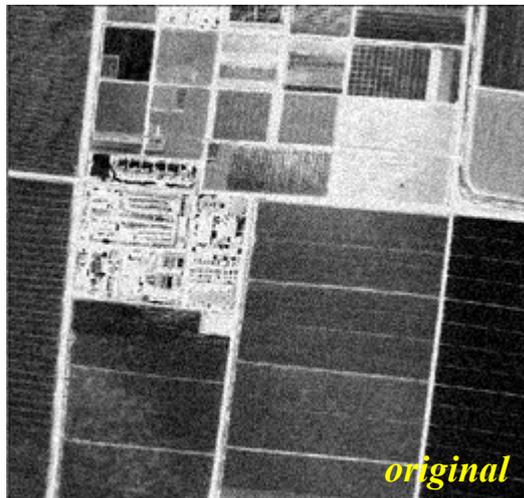
ex : bruit impulsionnel traité par un filtre médian (voisinage comme ci-dessus).



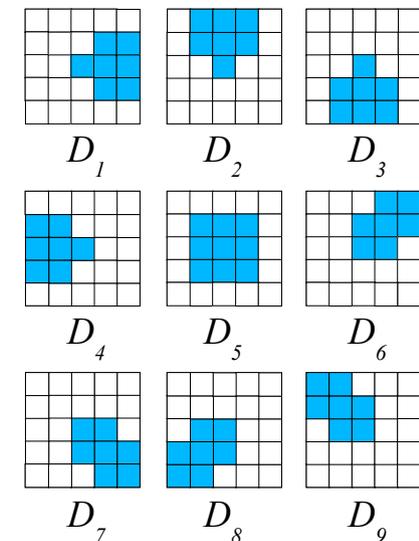
opérateurs morphologiques : à gauche Original au centre Érosion à droite Dilatation (élément structurant comme ci-dessus)

I-5-b Filtres non linéaires divers

On trouve dans la littérature de nombreux filtres combinant *filtres d'ordre*, *moyennes robustes* (opérations linéaires éliminant les valeurs marginales), et *anisotropie* (le support des opérations s'adapte en fonction des frontières locales). Nous décrivons ici comme exemple le *filtre de Nagao*.



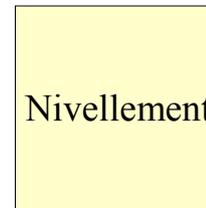
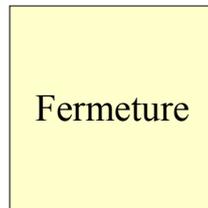
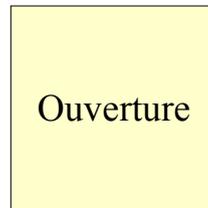
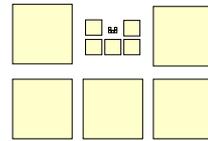
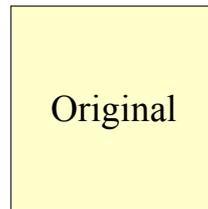
Le filtre de Nagao examine la fenêtre 5x5 centrée sur chaque pixel. 9 domaines sont définis dans cette fenêtre (voir figure). On calcule pour chaque domaine D_i la moyenne μ_i et la variance v_i . Le résultat de l'opérateur est la moyenne du domaine qui présente la plus faible variance.



Les 9 fenêtres de Nagao

I-5-c Filtres morphologiques

Les filtres morphologiques sont les opérateurs croissants et idempotents :



I-5-c Ouvertures et Fermetures

L'ouverture morphologique est égale à la composition d'une érosion suivie d'une dilatation. C'est un opérateur *croissant* et *idempotent* (i.e. un filtre morphologique)

$$\gamma_B = \delta_B \circ \varepsilon_B$$

$$\forall X \leq Y \gamma_B(X) \leq \gamma_B(Y)$$

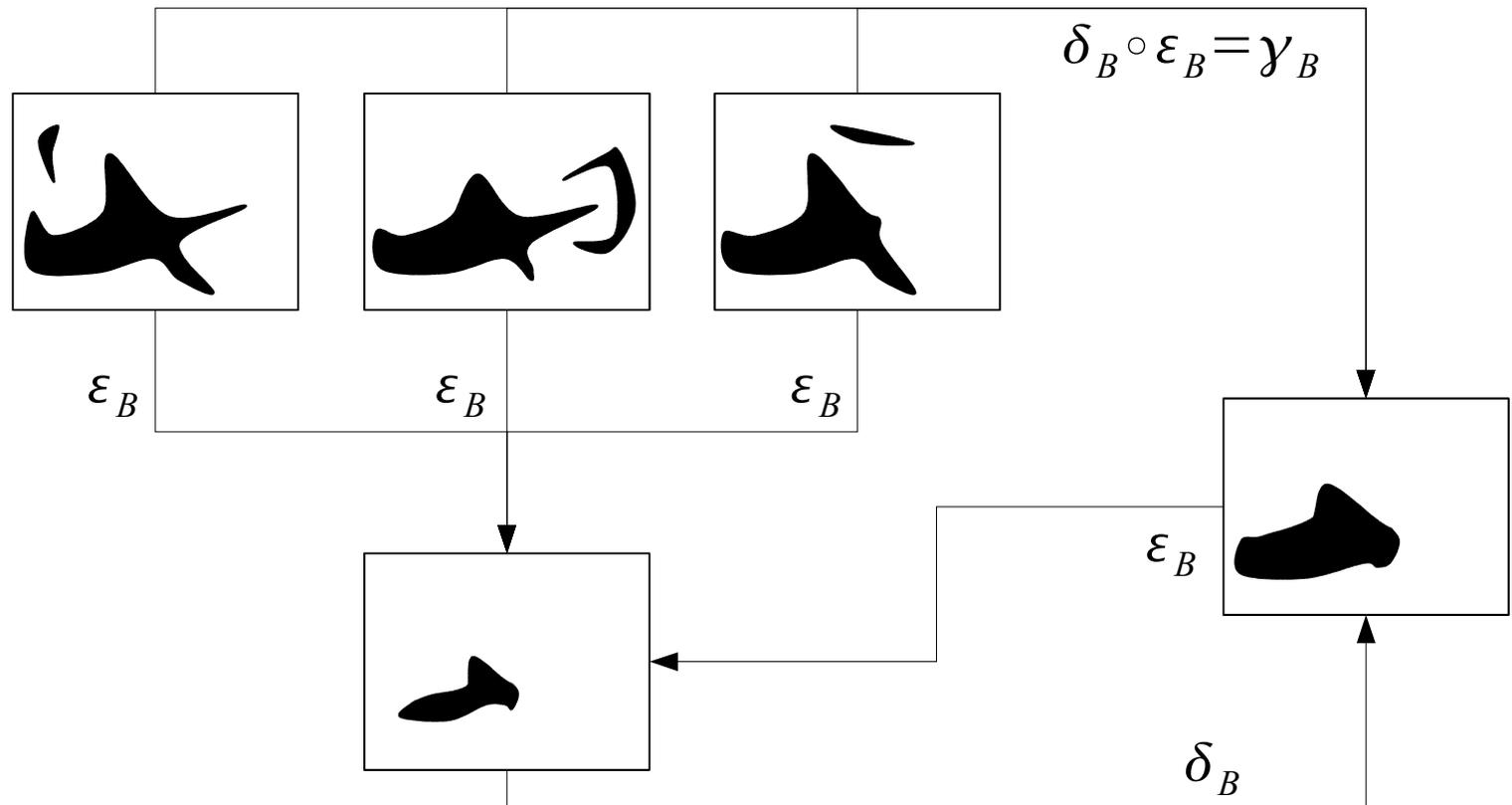
$$\forall X \gamma_B(\gamma_B(X)) = \gamma_B(X)$$

La fermeture morphologique est l'opération duale de l'ouverture :

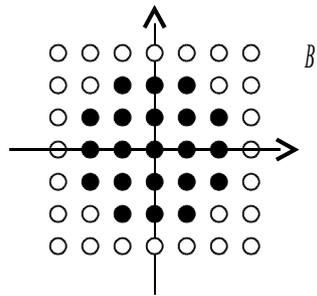
Elle est égale à la composition d'une dilatation suivie d'une érosion. C'est aussi un filtre morphologique.

$$\gamma_B(X^c) = (\varphi_B(X))^c$$

$$\varphi_B = \varepsilon_B \circ \delta_B$$



I-5-c Ouvertures et Fermetures



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.



X

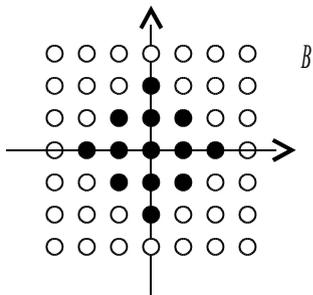


$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

I-5-c Ouvertures et Fermetures



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



X

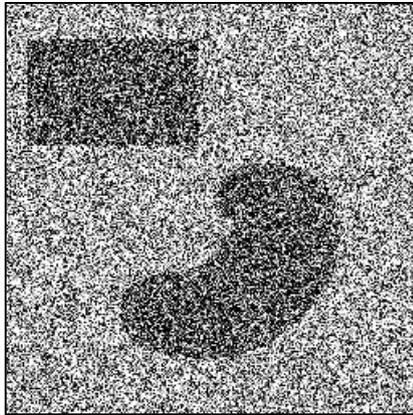


$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

I-5-c Filtres alternés séquentiels



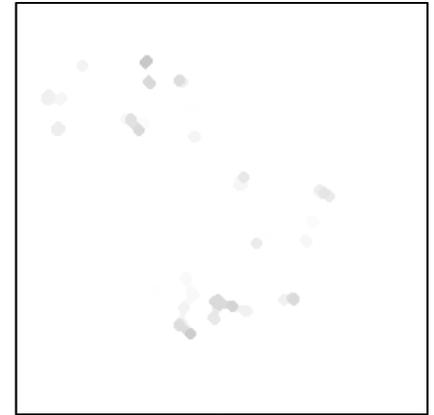
Original

Les filtres alternés séquentiels (FAS) sont une succession d'ouvertures et de fermetures utilisant des éléments structurants de taille croissantes :

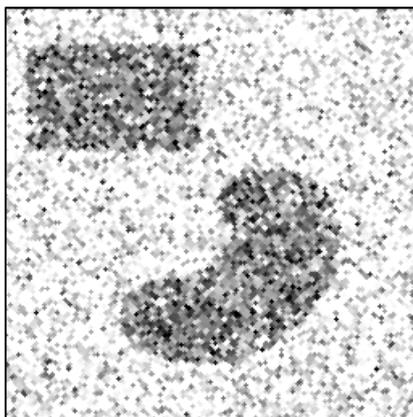
$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_1 \varphi_1 \\ E_n &= \gamma_n \varphi_n E_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \varphi_1 \gamma_1 \\ \Theta_n &= \varphi_n \gamma_n \Theta_{n-1} \end{aligned}$$

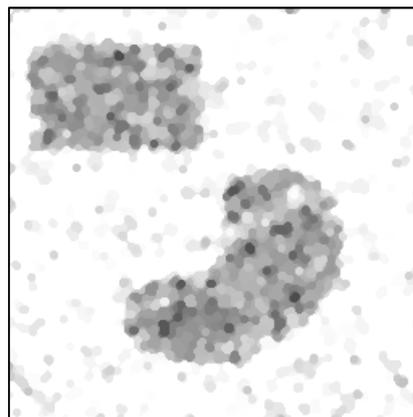
Les FAS conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



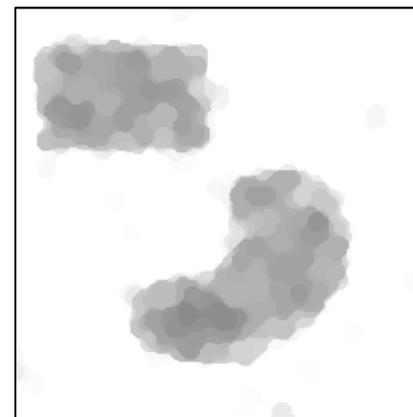
Application directe du filtre alterné $\gamma_4 \phi_4$



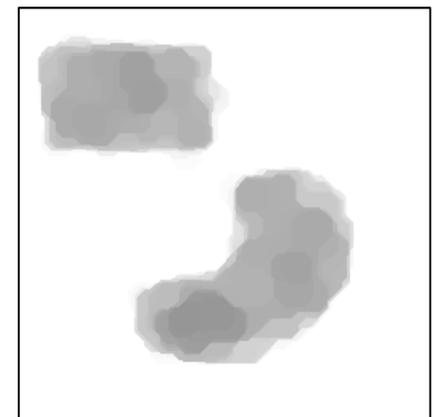
E_1



E_2

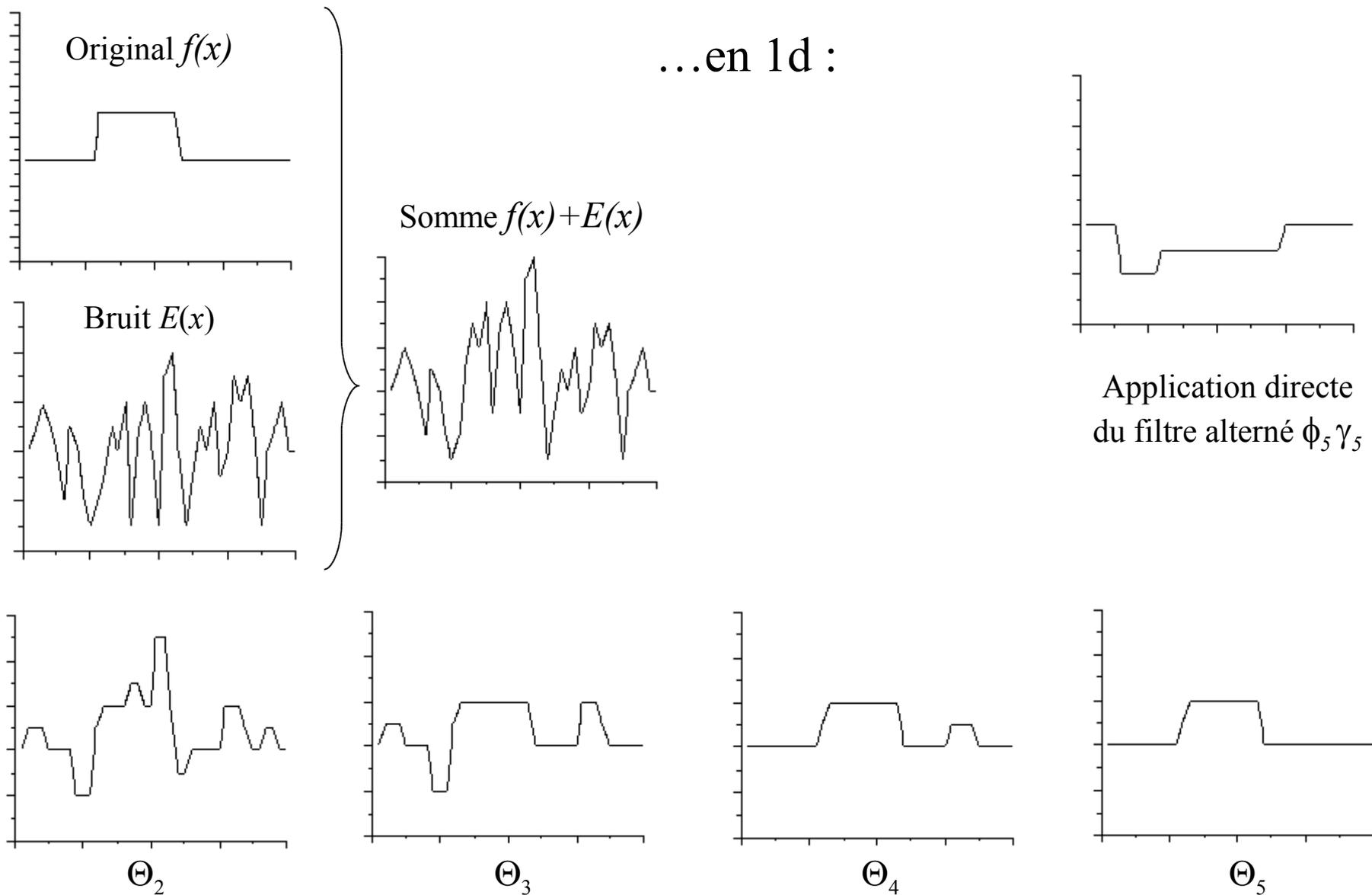


E_5

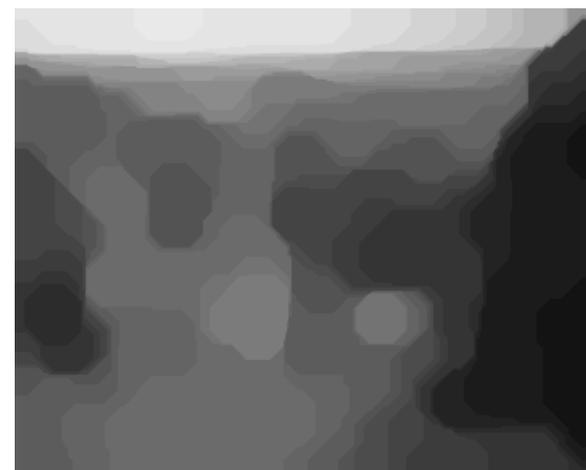
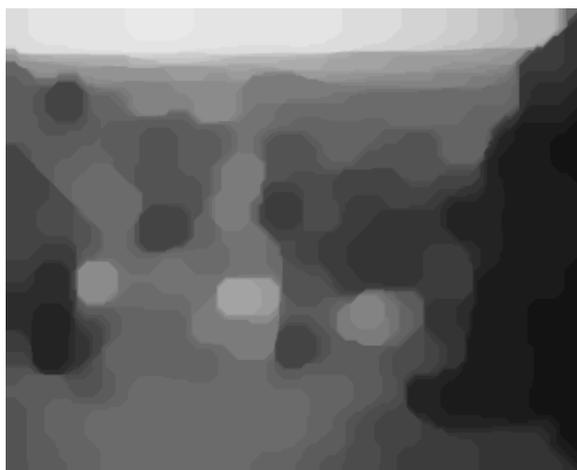
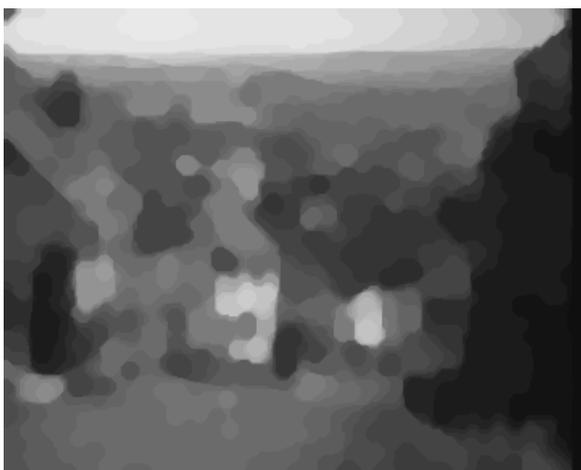


E_8

I-5-c Filtres alternés séquentiels

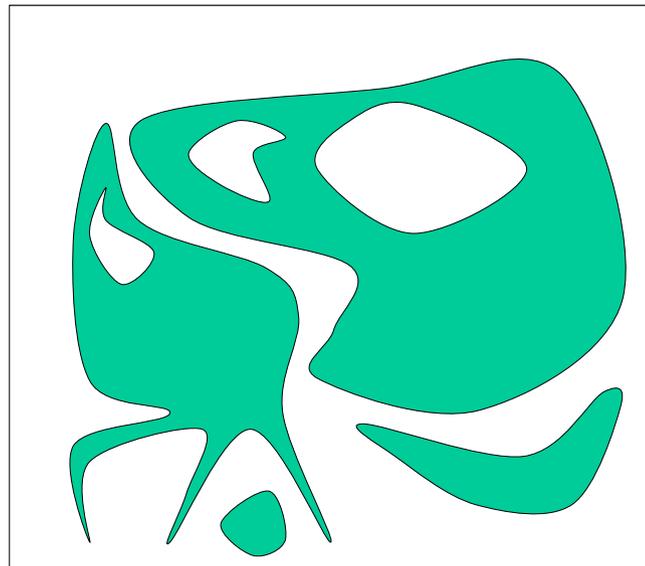


I-5-c Filtres alternés séquentiels

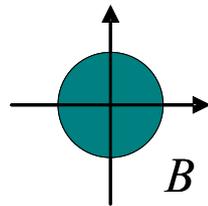


I-5-c Filtres connexes

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :

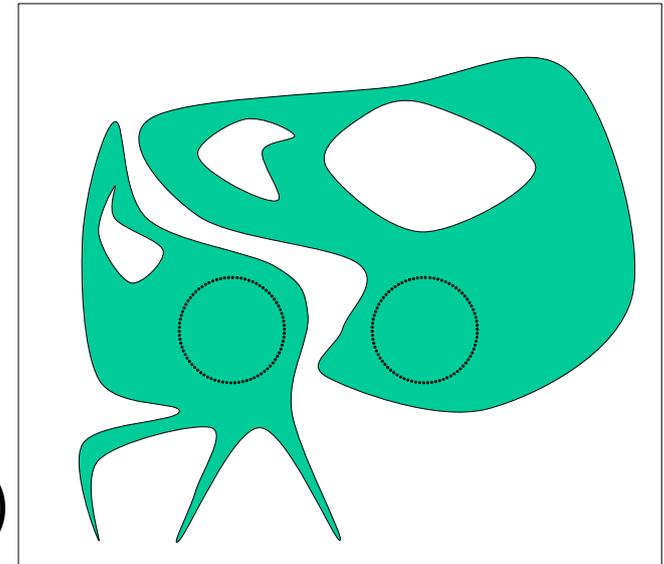


X



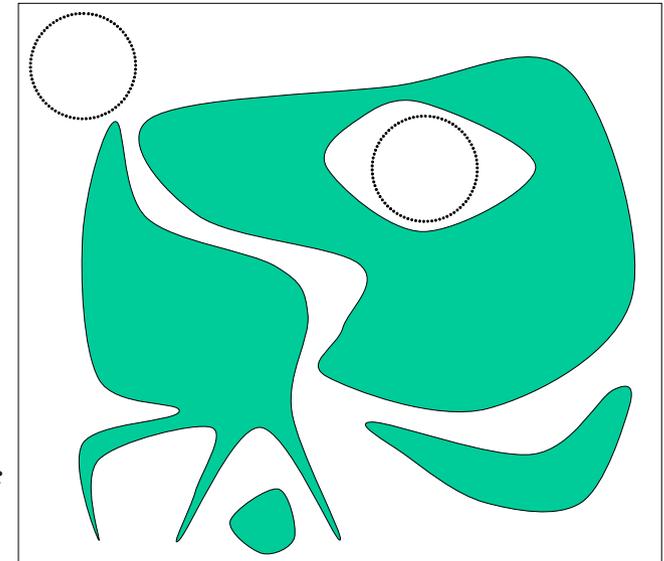
ouverture par reconstruction

$$E^X(\gamma_B(X))$$



fermeture par reconstruction

$$\left(E^{X^c} \left(\left(\varphi_B(X) \right)^c \right) \right)^c$$

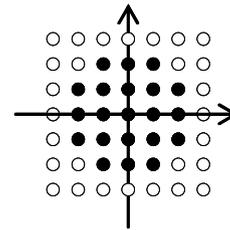


La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

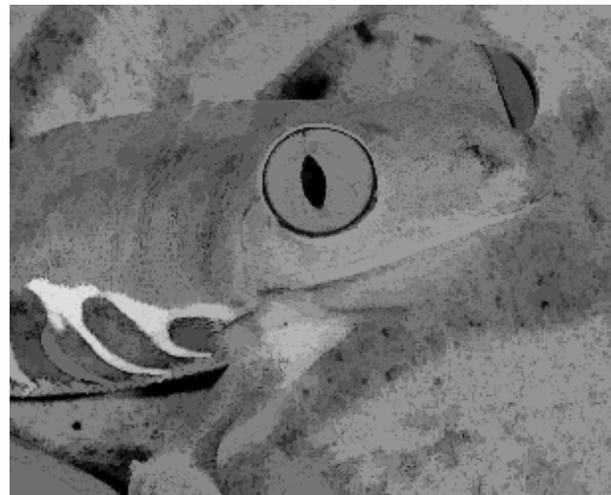
I-5-c Filtrés connexes

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant
de l'ouverture
morphologique :



original



ouverture par reconstruction

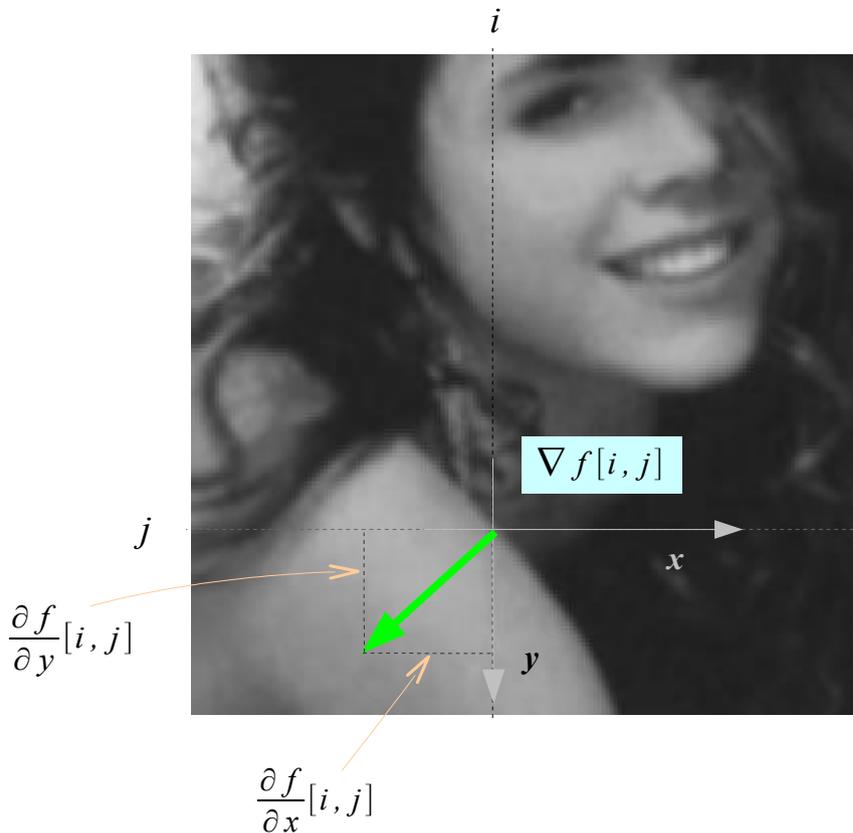


fermeture par reconstruction

I-5-c Filtres connexes



II Filtres dérivateurs



Les *variations locales d'intensité* constituent une source primordiale d'information en traitement d'images. Elles sont mesurées par le *gradient*, fonction *vectorielle* des pixels $[i, j]$:

$$\nabla f[i, j] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}[i, j], \frac{\partial f}{\partial y}[i, j] \right)$$

D'autres grandeurs différentielles sont utilisées en traitement d'images, comme le *laplacien*, fonction *scalaire* de $[i, j]$:

$$\Delta f[i, j] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[i, j] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[i, j]$$

ou encore le *hessien*, fonction *matricielle* de $[i, j]$:

$$H_f[i, j] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[i, j] & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[i, j] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[i, j] & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[i, j] \end{pmatrix}$$

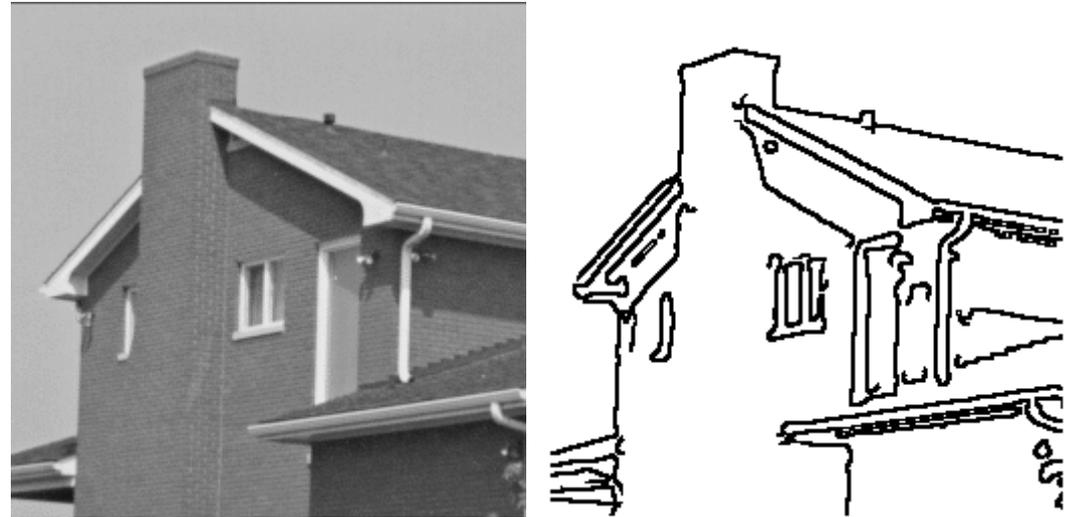
Le problème du calcul des filtres dérivateurs dans les images numériques est l'*approximation* de ces grandeurs différentielles dans notre espace discret ; on s'intéresse aussi à leur *utilisation* : réhaussement, détection de contours,...

II Filtres dérivateurs

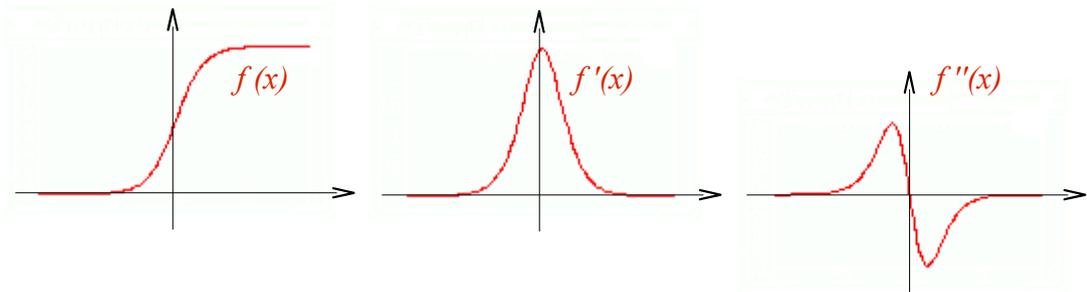
Les filtres dérivateurs sont des opérateurs qui mettent en évidence certaines variations spatiales dans les images. Ils sont utilisés comme traitements de base dans de nombreuses opérations, comme le réhaussement de contraste ou la détection de contours :



réhaussement de contraste obtenu par combinaison linéaire avec le laplacien.



les contours (image de droite) constituent une simplification de l'image utile dans de nombreuses applications. Dans les approches linéaires, ils sont en général obtenus à partir des maxima locaux de la dérivée première, ou des passages par zéro de la dérivée seconde :



PLAN DU CHAPITRE :

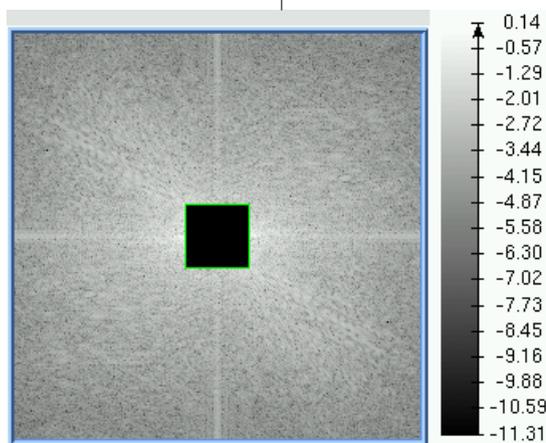
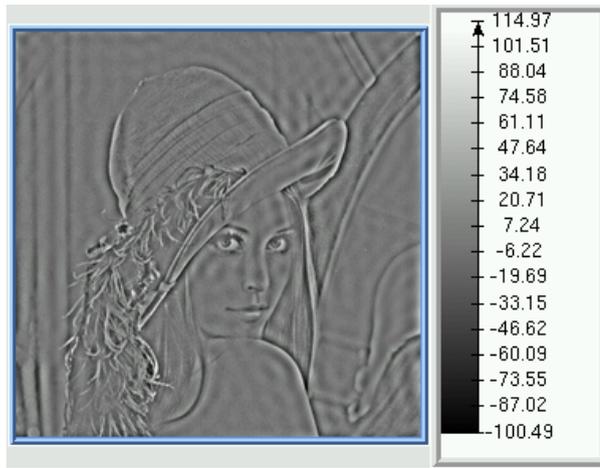
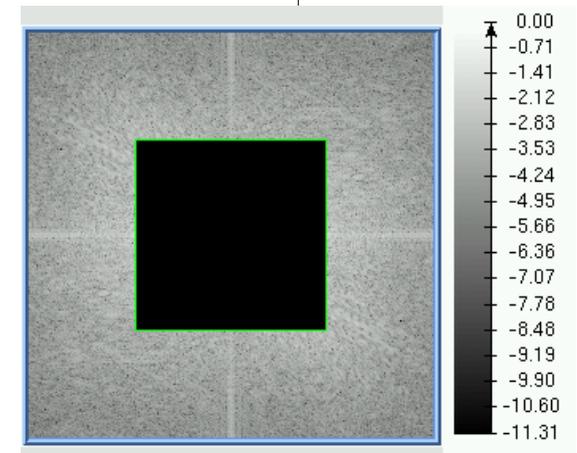
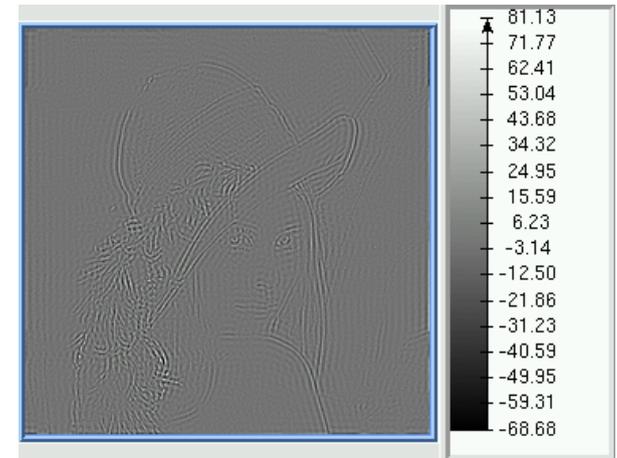
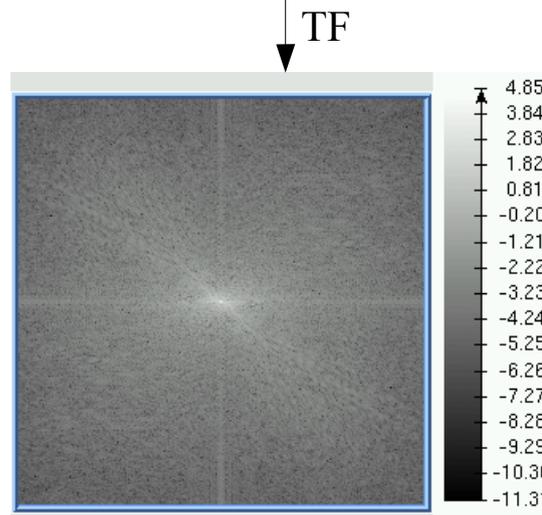
- (1) Filtrage dans le domaine de Fourier
- (2) Filtrage par convolution

II-1 Filtrage dans le domaine de Fourier

Le filtrage passe-haut correspond à la multiplication dans le domaine fréquentiel d'une fonction porte-complémentaire.

Filtrage passe-haut

Image originale



Filtre passe-haut $\phi = 20$

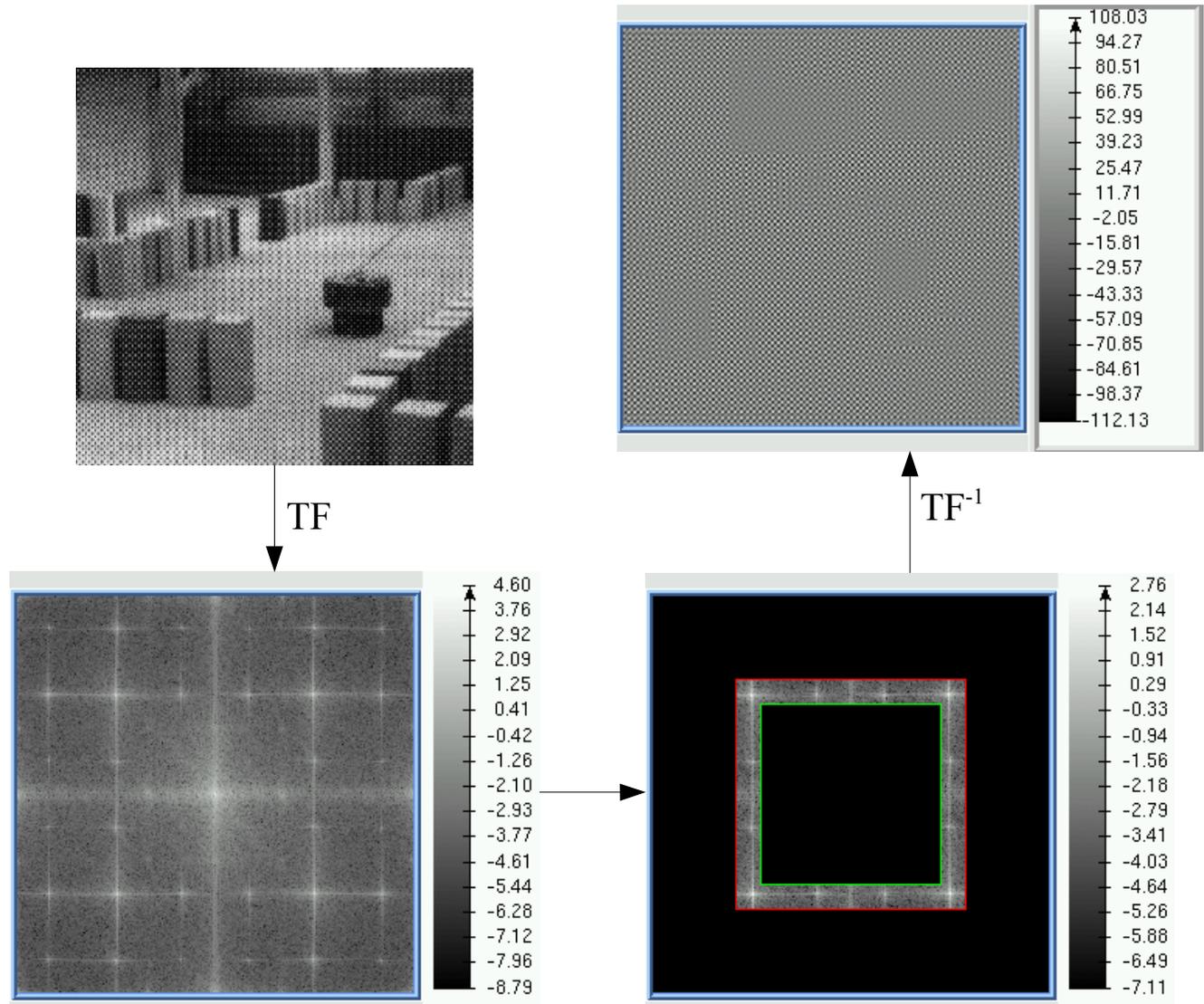
Filtre passe-haut $\phi = 60$

II-1 Filtrage dans le domaine de Fourier

Filtrage passe-bande

Le filtrage passe-bande correspond à la multiplication dans le domaine fréquentiel par une fonction bande symétrique.

Dans ce cas comme dans le précédent, la valeur de la fréquence origine (0,0) est annulée. Par conséquent, l'image correspondante dans le domaine spatial est de somme nulle, elle comporte donc des valeurs négatives.



II-2 Filtrage par convolution

Les approximations les plus simples des dérivées directionnelles se font par différences finies calculées par convolution avec des noyaux très simples :

Par ex : $[-1 \ 1]$, pour l'approximation de $\frac{\partial f}{\partial x}$, et : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, pour l'approximation de $\frac{\partial f}{\partial y}$

On utilise plus souvent $[-1 \ 0 \ 1]$, respectivement $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ qui produisent des frontières plus épaisses, mais bien centrées (phase nulle).

Ces opérations étant très sensibles au bruit, on les combine en général avec un filtre lisseur dans la direction orthogonale à celle de dérivation, par ex par le noyau suivant (ou sa transposée) : $[1 \ 2 \ 1]$

Le calcul des dérivées directionnelles en x et en y revient finalement à la convolution avec les noyaux suivants, respectivement :

$$\begin{aligned} f_x[i, j] &= (f * h_x)[i, j] & , \text{ avec : } & & h_x &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & h_y &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & & \text{(Masques de Sobel)} \\ f_y[i, j] &= (f * h_y)[i, j] \end{aligned}$$

On peut ensuite calculer la norme du gradient :

Et son orientation :

$$\begin{aligned} \|\nabla f[i, j]\|_2 &= \sqrt{f_x[i, j]^2 + f_y[i, j]^2} \\ \|\nabla f[i, j]\|_1 &= |f_x[i, j]| + |f_y[i, j]| \\ \|\nabla f[i, j]\|_\infty &= \max\{|f_x[i, j]|, |f_y[i, j]|\} \end{aligned}$$

$$\arg(\nabla f[i, j]) = \arctan\left(\frac{f_y[i, j]}{f_x[i, j]}\right)$$

II-2 Filtrage par convolution



Original



Noyau [-1 1]



Noyau [-1 0 1]

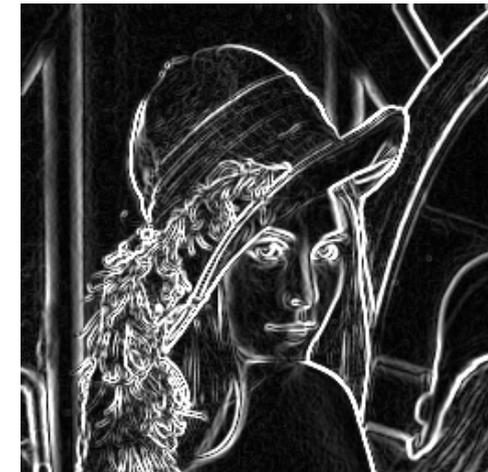
Notons que les noyaux dérivateurs sont à somme nulle, la transformée de Fourier de leur réponse impulsionnelle est donc nulle à l'origine.



Gradient horizontal (Sobel)



Gradient vertical (Sobel)



Module du gradient de Sobel

II-2 Filtrage par convolution

L'approximation par différences finies la plus simple de la dérivée seconde est la convolution par le noyau :

$$[1 \ -2 \ 1] \quad , \text{ pour l'approximation de } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ et : } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \text{ pour l'approximation de } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

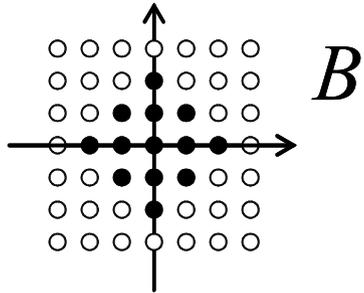
Le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ peut donc être approximé par l'opérateur linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & -4 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Laplacien en} \\ \text{4-connexité}$$

$$\text{, ou encore } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Laplacien en} \\ \text{8-connexité}$$



II-3 Opérateurs résiduels non linéaires



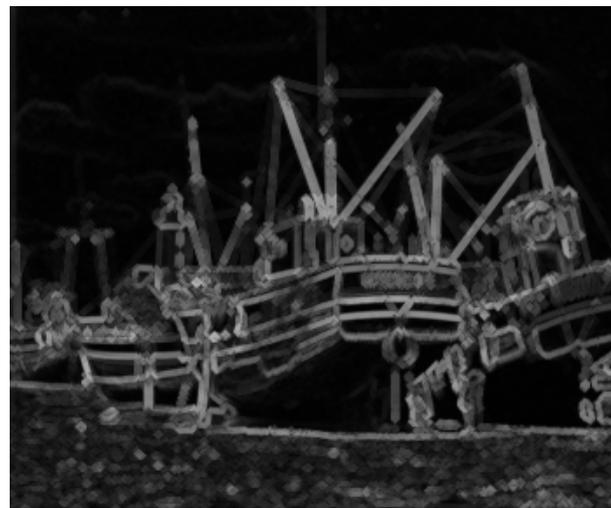
$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



X

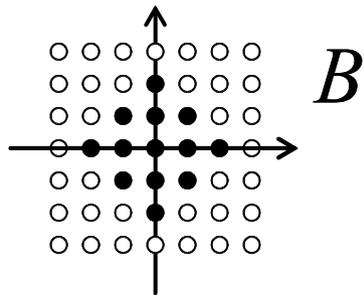


$g_B(X) = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$



$\lambda_B(X) = \varepsilon_B(X) + \delta_B(X) - 2X$

II-3 Opérateurs résiduels non linéaires



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$



X



$\tau_B(X) = X - \gamma_B(X)$



$\tilde{\tau}_B(X) = \varphi_B(X) - X$

II TI et portée des opérateurs

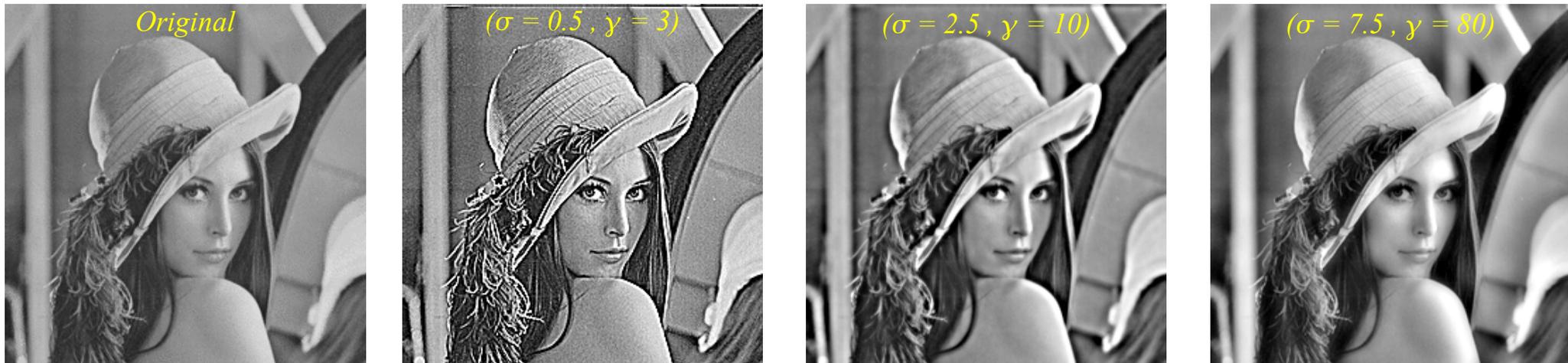
Les opérateurs de traitement d'images possèdent une certaine portée correspondant à l'amplitude du voisinage qui interagit.

Un exemple, l'opération de réhaussement de contraste (unsharp masking) :

$$R_f[x, y] = f[x, y] - \gamma \cdot \Delta f[x, y] \quad (\gamma : \text{gain})$$

En soustrayant le laplacien à l'image original, on augmente le contraste.

Mais le contraste est une notion multi-échelle :



Il faut donc des mécanismes pour adapter la portée des opérateurs (voir cours espaces d'échelle).

Laplaciens calculés par dérivées secondes de noyaux gaussiens, pour $\sigma = 1$, puis 5, puis 15 :

